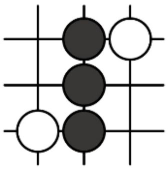
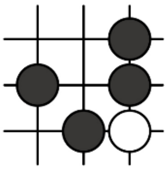
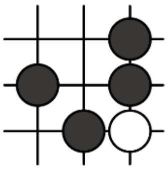
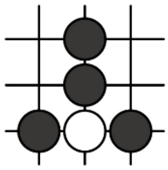
2022 北京人朝分校初三（上）期中

数　　学

（考试时间：120 分钟　　满分：100 分）

一、选择题（本题共 24 分，每小题 3 分）下面各题均有四个选项，其中只有一个是符合题意的．

1. 围棋起源于中国，古代称之为“弈”，至今已有 4000 多年的历史．2017 年 5 月，世界围棋冠军柯洁与人工智能机器人 *AlphaGo* 进行围棋人机大战．截取首局对战棋谱中的四个部分，由黑白棋子摆成的图案是中心对称的是（　）

A. 　　B. 　　C. 　　D. 

2. 下列方程中是一元二次方程的是（　）

A. $x-3=0$　　B. $x+\frac{3}{x}=0$　　C. $x+y=1$　　D. $2x^2-x-3=0$

3. 抛物线 $y=\left(x-2\right)^2+1$ 的对称轴是（　）

A. 直线 $x=2$　　B. 直线 $x=-2$　　C. 直线 $x=0$　　D. 直线 $x=1$

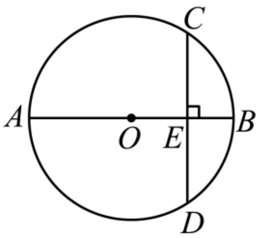
4. 点 $P\left(-2,3\right)$ 关于原点对称的点 P' 的坐标是（　）

A. $\left(-2,3\right)$　　B. $\left(2,-3\right)$　　C. $\left(-3,2\right)$　　D. $\left(3,-2\right)$

5. 用配方法解方程 $x^2-2x-1=0$，配方结果正确的是（　　）

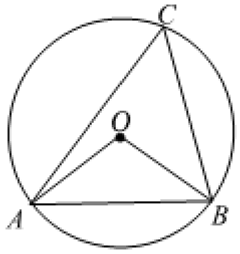
A. $\left(x+1\right)^2=1$　　B. $\left(x-1\right)^2=1$　　C. $\left(x+1\right)^2=2$　　D. $\left(x-1\right)^2=2$

6. 如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$ 于点 E，已知 $CD=16$，$OE=6$，则 $\odot O$ 的半径为（　）



A. 8　　B. 10　　C. 16　　D. 20

7. 如图，点 A，B，C 为 $\odot O$ 上三点，若 $\angle C=54°$，则 $\angle AOB$ 的大小为（　）



A. 27°　　B. 36°　　C. 54°　　D. 108°

8. 已知一个二次函数图象经过$P_1(-3,y_1)$，$P_2(-1,y_2)$，$P_3(1,y_3)$，$P_4(3,y_4)$四点，若$y_2<y_3<y_1$，则y_1，y_2，y_3，y_4的最值情况是（　）

A. y_3最小，y_1最大　　B. y_3最小，y_4最大　　C. y_2最小，y_4最大　　D. 无法确定

二、填空题（本题共16分，每小题2分）

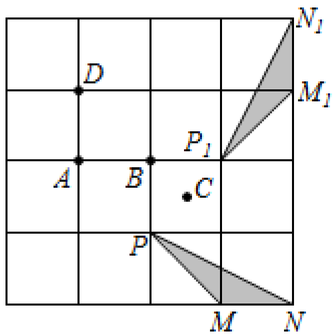
9. 写出一个图象开口向上，且经过点$(0,1)$的二次函数的解析式：_______.

10. 关于x的一元二次方程$x^2+3x-m=0$有一个根是$x=1$，则$m=$__________.

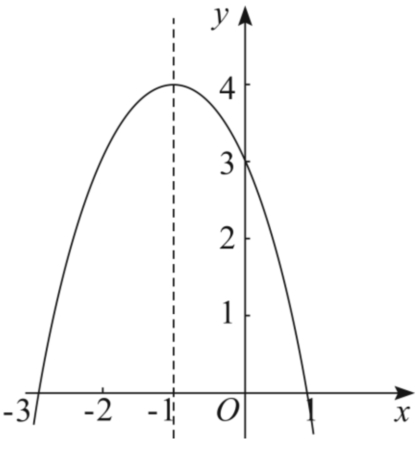
11. 在平面直角坐标系xOy中，将抛物线$y=x^2$沿着y轴向上平移2个单位长度所得抛物线解析式为______.

12. 一元二次方程$2x^2-6x-3=0$的二次项系数是________，一次项系数是________.

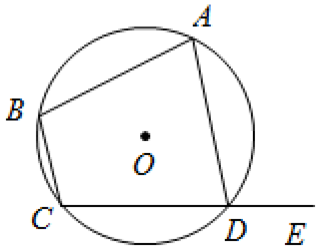
13. 在如图所示的正方形网格中，$\triangle MNP$绕某点旋转一定的角度，得到$\triangle M_1N_1P_1$，则旋转中心可能是A、B、C、D中的点______.



14. 已知二次函数$y=ax^2+bx+c$的部分图像如图所示，则使得函数值y大于0的自变量x的取值范围是___________.



15. 如图，点 A、B、C、D 都在 $\odot O$ 上，点 E 在 CD 的延长线上，若 $\angle ABC = 100°$，则 $\angle ADE$ 的度数是_________°.



16. 高速公路某收费站出城方向有编号为 A，B，C，D，E 的五个小客车收费出口，假定各收费出口每 20 分钟通过小客车的数量分别都是不变的．同时开放其中的某两个收费出口，这两个出口 20 分钟一共通过的小客车数量记录如下：

收费出口编号	A，B	B，C	C，D	D，E	E，A
通过小客车数量（辆）	260	330	300	360	240

在 A，B，C，D，E 五个收费出口中，每 20 分钟通过小客车数量最多的收费出口的编号是_______.

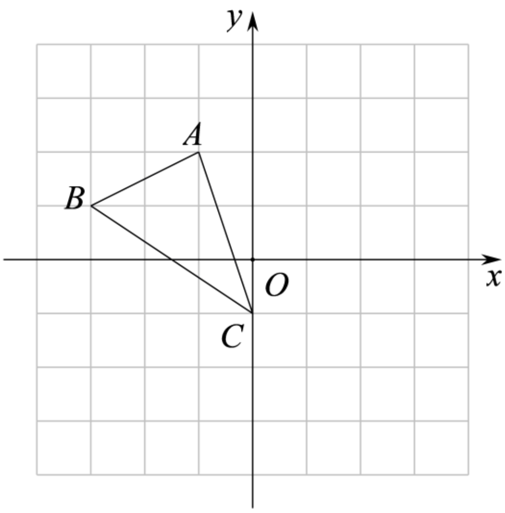
三、解答题（本题共 60 分，第 17 题 10 分，第 18～24 题，每小题 5 分；第 25 题 6 分；第 26～27 小题，每小题 7 分）

17. 解方程：

（1）$x^2 - 4x + 3 = 0$

（2）$9x^2 - 1 = 0$

18. 如图，在平面直角坐标系中，每个小正方形的边长为 1cm，$\triangle ABC$ 各顶点都在格点上，点 A，B，C 的坐标分别为 $(-1,2)$，$(-3,1)$，$(0,-1)$，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转 $90°$，画出旋转后的 $\triangle A_1B_1C_1$，此时点 A，点 B 的对应点 A_1, B_1 的坐标分别是________，________.



19. 如图 1 是博物馆展出的古代车轮实物，《周礼・考工记》记载：“……故兵车之轮六尺有六寸，田车之轮六尺有三寸……”据此， 我们可以通过计算车轮的半径来验证车轮类型，请将以下推理过程补充完整．

图 1

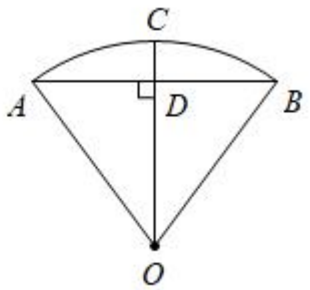


图 2

如图 2 所示，在车轮上取 *A*、*B* 两点，设 $\overset{\frown}{AB}$ 所在圆的圆心为 *O*，半径为 *r* cm．

作弦 *AB* 的垂线 *OC*，*D* 为垂足，则 *D* 是 *AB* 的中点．其推理的依据是：__________．

经测量，*AB*＝90cm，*CD*＝15cm，则 *AD*＝__________cm；

用含 *r* 的代数式表示 *OD*，*OD*＝__________cm．

在 Rt△*OAD* 中，由勾股定理可列出关于 *r* 的方程：

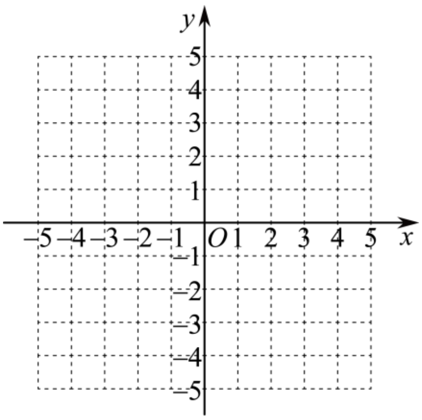
$r^2=$__________，解得 *r*＝75

通过单位换算，得到车轮直径约为六尺六寸，可验证此车轮为兵车之轮．

20. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ 图像上部分点的横坐标 *x* 与纵坐标 *y* 的对应值如下表：

x	…	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	5	0	−3	−4	−3	0	…

（1）求此抛物线的解析式，并画出图像；



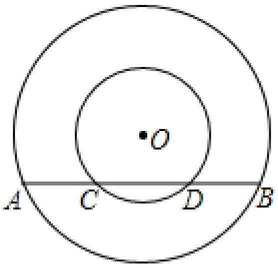
（2）结合图像直接写出当 0≤*x*≤4 时，*y* 的范围．

21. 关于 *x* 的一元二次方程 $x^2-2x+m=0$ 有两个不相等的实数根．

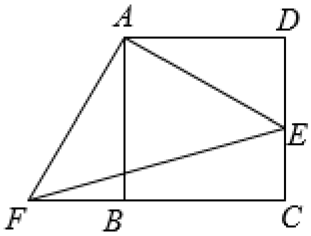
（1）求 *m* 的范围；

（2）当 m 取最大整数值时，求此时方程的根．

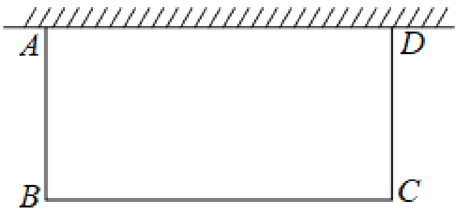
22. 如图，两个圆都以点 O 为圆心，大圆的弦 AB 交小圆于 C,D 两点．求证：$AC=BD$．



23. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 为 CD 上一点，把 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ 至 $\triangle ABF$ 的位置，$AB=\sqrt{3}$，$\angle EAD=30°$，求线段 EF 的长度．



24. 如图，用一段长为 30m 的篱笆围成一个一边靠墙的矩形花圃 $ABCD$，墙长 18m．当 AB 长为多少米时，所围成的花圃面积最大？最大面积是多少？



25. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2-3ax+1$ 与 y 轴交于点 A．

（1）求抛物线的对称轴；

（2）点 B 是点 A 关于对称轴的对称点，求点 B 的坐标；

（3）已知点 $P(0，2)$，$Q\left(a+1,1\right)$，若线段 PQ 与抛物线与恰有一个公共点，结合函数图象，求 a 的取值范围．

26. 在等腰 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=BC$，点 D 在线段 BC 上，点 E 在线段 AC 上，将线段 DE 绕点 D 顺时针旋转 $90°$ 得到线段 DF．

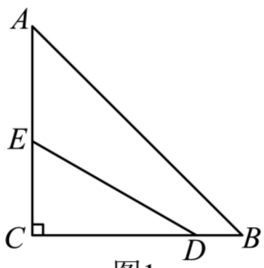
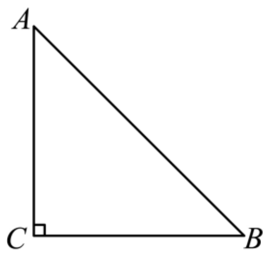


图1



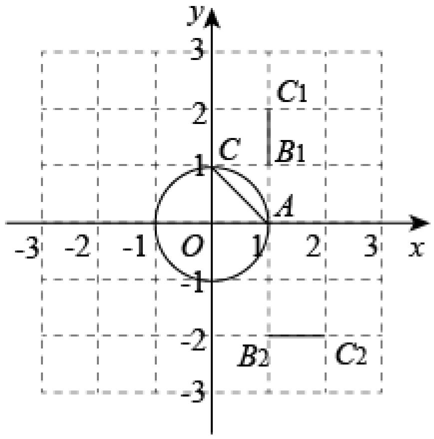
备用图

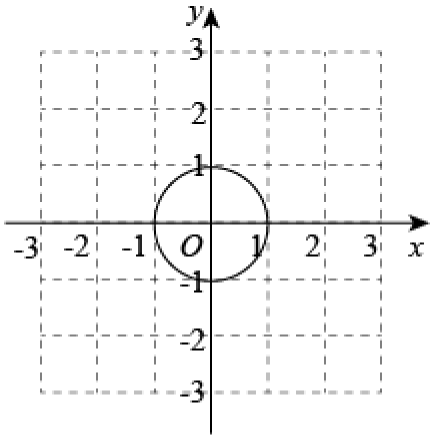
（1）依题意补全图 1；

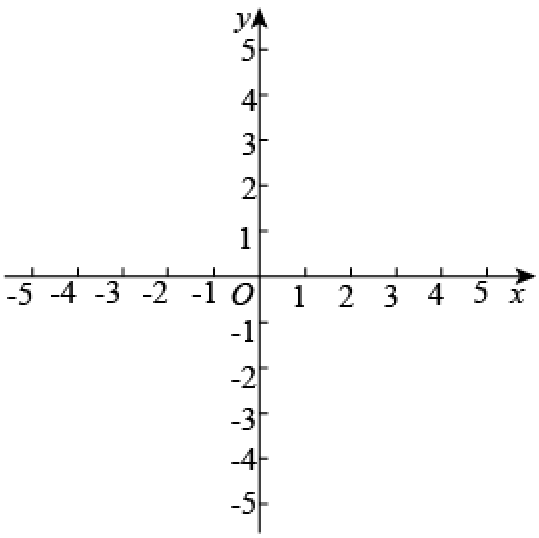
（2）求证：$\angle CED=\angle FDB$；

（3）点 M 为 AB 中点，射线 CM 交 EF 于点 N，探究 EN 与 FN 的数量关系，并说明理由.

27. 在平面直角坐标系 xOy 中，$\odot O$ 的半径为 1．对于点 A 和线段 BC，给出如下定义，若将线段 BC 绕点 A 旋转可以得到 $\odot O$ 的弦 $B'C'$（B'，C' 分别是 B，C 的对应点），则称线段 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的"关联线段"．







备用图

（1）如图，点 A，C，B_1,C_1，B_2,C_2 的横、纵坐标都是整数．在线段 AC，B_1C_1,B_2C_2，中，$\odot O$ 的以点 A 为中心的"关联线段"是________；

（2）$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle A=90^\circ$，$AB=1$，点 $A(0,t)$，其中 $t\neq 0$．若 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的"关联线段"，求 t 的值；

（3）在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$AC=3$．若 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的"关联线段"，直接写 OA 的最小值和最大值，以及相应的 BC 长.

参考答案

一、选择题（本题共24分，每小题3分）下面各题均有四个选项，其中只有一个是符合题意的.

1.【答案】A

【分析】根据中心对称图形的定义逐项识别即可，在平面内，把一个图形绕着某个点旋转180°，如果旋转后的图形能与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形.

【详解】A.是中心对称图形，符合题意；

B.不是中心对称图形，故不符合题意；

C.不是中心对称图形，故不符合题意；

D.不是中心对称图形，故不符合题意；

故选：A.

【点睛】本题考查了中心对称图形的识别，熟练掌握中心对称图形的定义是解答本题的关键.

2.【答案】D

【分析】根据一元二次方程的定义:含有一个未知数，且未知数的最高次数为 2 的整式方程是一元二次方程，解答.

【详解】解：A． $x-3=0$是一元一次方程，不符合题意；

B． $x+\frac{3}{x}=0$是分式方程，不符合题意；

C． $x+y=1$是二元一次方程，不符合题意；

D． $2x^2-x-3=0$是一元二次方程，符合题意，

故选：D.

【点睛】本题考查一元二次方程的定义，掌握一元二次方程的定义是解题的关键.

3.【答案】A

【分析】抛物线$y=a\left(x-h\right)^2+k$的对称轴为$x=h$，最值为$y=k$.

【详解】解：$\because$ 抛物线$y=\left(x-2\right)^2+1$，

$\therefore$对称轴为$x=2$.

故选：A.

【点睛】本题考查了二次函数$y=a\left(x-h\right)^2+k$的图象和性质，解决此题的关键是熟记基础知识.

4.【答案】B

【分析】根据关于原点对称的点的坐标，横、纵坐标互为相反数即可求解.

【详解】解：点$P\left(-2,3\right)$关于原点对称的点的坐标是$\left(2,-3\right)$，

故选：B．

【点睛】本题考查了关于原点对称的点的坐标的特点，掌握关于原点对称的点的坐标横、纵坐标互为相反数是解题的关键．

5.【答案】D

【分析】先移项，再等号两边同时加上一次项系数的一半即可．

【详解】解：$x^2-2x-1=0$，

$x^2-2x=1$，

$x^2-2x+1=2$，

$(x-1)^2=2$，

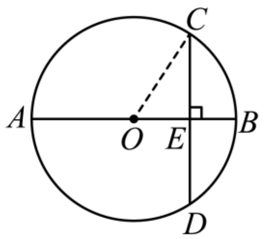
故选：D．

【点睛】本题主要考查一元二次方程的配方，熟练掌握完全平方公式是解题的关键．

6.【答案】B

【分析】连接OC，由垂径定理可知，点E为CD的中点，且$OE\perp CD$，在$\mathrm{Rt}\triangle OEC$中，根据勾股定理，即可得出OC．

【详解】连接OC，



$\because AB$为$\odot O$的直径，弦$CD\perp AB$于E，由垂径定理可知，点E为CD的中点，

$\therefore CE=\dfrac{1}{2}CD=8$，

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle OEC$中，$OC=\sqrt{CE^2+OE^2}=10$，

$\therefore\odot O$的半径10，

故选：B．

【点睛】本题考查了垂径定理，勾股定理，熟练掌握定理是解答关键

7.【答案】D

【分析】直接根据圆周角定理即可得出结论．

【详解】解：$\because\angle C$与$\angle AOB$是同弧所对的圆周角与圆心角，

$\therefore\angle AOB=2\angle C=108^\circ$，

故选：D．

【点睛】本题考查的是圆周角定理，熟知在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半是解答此题的关键．

8.【答案】C

【分析】根据题意判断抛物线开口向上，对称轴在直线 $x=0$ 与直线 $x=-1$ 之间，然后根据点到对称轴的距离的大小即可判断.

【详解】∵二次函数图象经过 $P_1\left(-3,y_1\right)$，$P_2\left(-1,y_2\right)$，$P_3\left(1,y_3\right)$，$P_4\left(3,y_4\right)$ 四点，且 $y_2<y_3<y_1$，

∴抛物线的开口向上，且对称轴在直线 $x=0$ 与直线 $x=-1$ 之间，

∴ $P_4\left(3,y_4\right)$ 离对称轴的距离最大，$P_2\left(-1,y_2\right)$ 离对称轴的距离最小，

∴ y_2 最小，y_4 最大，

故选：C.

【点睛】本题考查了二次函数图象上点的坐标的特征，二次函数的性质，熟练掌握二次函数图象开口方向及对称轴的位置是解题的关键.

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9.【答案】$y=x^2+1$ 等

【分析】设二次函数的表达式为 y=ax²+bx+c(a≠0)，根据开口向上，a＞0，可取 a=1，将(0，1)代入得出 c=1，即可得出二次函数表达式.

【详解】设二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$ (a≠0)，

∵图象为开口向上，且经过(0，1)，

∴a＞0，c=1，

∴二次函数表达式可以为：$y=x^2+1$(答案不唯一).

故答案为：$y=x^2+1$(答案不唯一).

【点睛】本题主要考查了二次函数的性质，得出 a 的符号和 c=1 是解题关键.

10.【答案】4

【分析】把 $x=1$ 代入方程，得到关于 m 的方程，即可求解.

【详解】∵关于 x 的一元二次方程 $x^2+3x-m=0$ 有一个根是 $x=1$，

∴ $1^2+3\times1-m=0$，解得：$m=4$，

故答案是：4.

【点睛】本题考查利用一元二次方程的根求参数的值，解题关键是掌握一元二次方程解的含义.

11.【答案】$y=x^2+2$

【分析】根据抛物线的平移规律：左加右减，上加下减，进行计算即可.

【详解】解：将抛物线 $y=x^2$ 沿着 y 轴向上平移 2 个单位长度所得抛物线解析式为：$y=x^2+2$；

故答案为：$y=x^2+2$.

【点睛】本题考查二次函数图象的平移．熟练掌握抛物线的平移规律，是解题的关键.

12.【答案】 ①. 2 ②. -6

【分析】根据一元二次方程一般形式的定义，即可求解．

【详解】解：一元二次方程$2x^2-6x-3=0$的二次项系数是2，一次项系数是-6，

故答案为：2，-6．

【点睛】本题考查了一元二次方程的一般形式，解题的关键是掌握一元二次方程一般形式$y=ax^2+bx+c\left(a\neq0\right)$，其中$a$是二次项系数，$b$是一次项系数，$c$是常数项．

13.【答案】B

【分析】根据旋转中心的确认方法，作对应点连线的垂直平分线，再找到交点即可．

【详解】解：∵△MNP绕某点旋转一定的角度，得到△$M_1N_1P_1$，

∴连接PP_1、NN_1、MM_1，

作PP_1的垂直平分线过B、D、C，

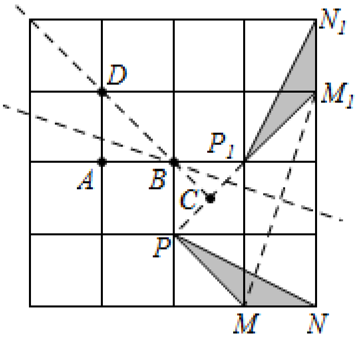
作NN_1的垂直平分线过B、A，

作MM_1的垂直平分线过B，

∴三条线段的垂直平分线正好都过B，

即旋转中心是B．

故答案为B．



【点睛】此题主要考查旋转中心的确认，解题的关键是熟知旋转的性质特点．

14.【答案】$-3<x<1$##$1>x>-3$

【分析】根据图像可得二次函数的开口方向和与x轴的交点坐标，即可得出结论．

【详解】解：由二次函数$y=ax^2+bx+c$的部分图象可得：

函数图像开口方向向下，与x轴的交点为$\left(-3,0\right)$和$\left(1,0\right)$

所以当函数值$y>0$时，自变量x的取值范围为：$-3<x<1$．

故答案为：$-3<x<1$

【点睛】本题主要考查二次函数的图像，结合图像的开口方向和与x轴的交点坐标来判断函数值y大于0时自变量x的取值范围是解题的关键．

15.【答案】100

【分析】根据圆的内接四边形对角互补的性质求出$\angle ADE$的度数．

【详解】解：∵四边形$ABCD$是$\odot O$的内接四边形，

∴$\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$，

$\because \angle ADE + \angle ADC = 180^\circ$，

$\therefore \angle ADE = \angle ABC = 100^\circ$.

故答案是：100 .

【点睛】本题考查圆的内接四边形的性质，解题的关键是掌握圆的内接四边形对角互补的性质.

16.【答案】B

【分析】根据表中数据两两相比较即可得到结论.

【详解】解：$\because 330-260=70, 330-300=30, 360-300=60, 360-240=120, 260-240=20$，

$\therefore A$收费出口通过的数量小于C收费出口通过的数量；D收费出口通过的数量小于B收费出口通过的数量；E收费出口通过的数量大于C收费出口通过的数量；D收费出口通过的数量大于A收费出口通过的数量；B收费出口通过的数量大于E收费出口通过的数量；

$\therefore B>E>C>A, B>D>A$，

$\therefore$每20分钟通过小客车数量最多的一个收费出口的编号是B.

故答案为：B.

【点睛】本题主要考查统计表和不等式的基本性质，正确的理解题意是解题的关键.

三、解答题（本题共 60 分，第 17 题 10 分，第 18～24 题，每小题 5 分；第 25 题 6 分；第 26～27 小题，每小题 7 分）

17.【答案】（1）$x_1=3$，$x_2=1$

（2）$x_1=-\frac{1}{3}$，$x_2=\frac{1}{3}$

【分析】（1）用因式分解法求解即可；

（2）用直接开平方求解即可.

【小问 1 详解】

解：$\because x^2-4x+3=0$，

$\therefore (x-3)(x-1)=0$，

$\therefore x-3=0$或$x-1=0$，

$\therefore x_1=3$，$x_2=1$

【小问 2 详解】

解：$\because 9x^2-1=0$，

$\therefore x^2=\frac{1}{9}$，

$\therefore x=\pm\frac{1}{3}$，

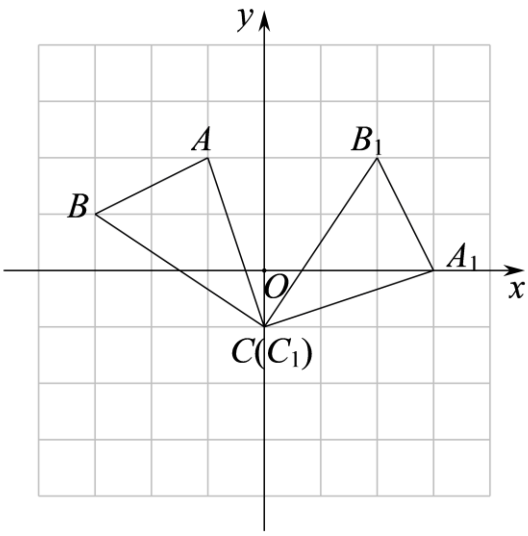
$\therefore x_1=-\frac{1}{3}$，$x_2=\frac{1}{3}$

【点睛】本题考查了一元二次方程的解法，常用的方法有直接开平方法、配方法、因式分解法、求根公式法，熟练掌握各种方法是解答本题的关键．

18.【答案】作图见解析，$\left(-3,0\right)$，$\left(2,2\right)$

【分析】根据旋转的性质，结合题意，分别作出 A，B 的对应点 A_1, B_1，根据坐标系写出点 A_1, B_1 的坐标即可求解．

【详解】△A_1B_1C 作图如下：$A_1\left(-3,0\right)$，$B_1\left(2,2\right)$



故答案为：$\left(-3,0\right)$，$\left(2,2\right)$．

【点睛】本题考查了画旋转图形，写出点的坐标，掌握旋转的性质是解题的关键．

19.【答案】垂直于弦的直径平分弦；45；$\left(r-15\right)$；$45^2+\left(r-15\right)^2$

【分析】根据垂径定理，利用勾股定理构建方程求解即可．

【详解】解：如图 2 所示，在车轮上取 A、B 两点，设 $\overset{\frown}{AB}$ 所在圆的圆心为 O，半径为 r cm．

作弦 AB 的垂线 OC，D 为垂足，则 D 是 AB 的中点．其推理依据是：垂直弦（非直径）的直径平分弦．

经测量：AB=90cm，CD=15cm，则 AD=45cm；

用含 r 的代数式表示 OD，OD=（r-15）cm．

在 Rt△OAD 中，由勾股定理可列出关于 r 的方程：

$r^2=45^2+(r-15)^2$，

解得 r=75．

通过单位换算，得到车轮直径约为六尺六寸，可验证此车轮为兵车之轮．

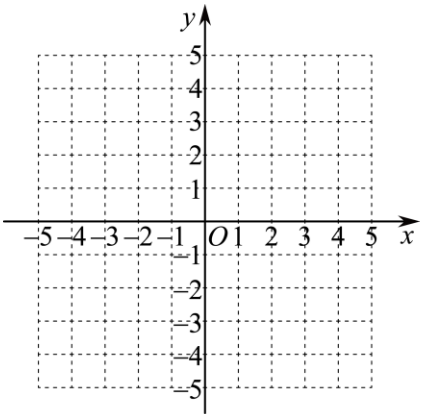
故答案为：垂直弦的直径平分弦，45,（r-15），$45^2+(r-15)^2$．

【点睛】本题考查垂径定理，勾股定理等知识，解题的关键是学会利用参数构建方程解决问题，属于中考常考题型．

20. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ 图像上部分点的横坐标 x 与纵坐标 y 的对应值如下表：

x	…	－2	－1	0	1	2	3	…
y	…	5	0	－3	－4	－3	0	…

（1）求此抛物线的解析式，并画出图像；



（2）结合图像直接写出当 $0\leqslant x\leqslant 4$ 时，y 的范围．

【答案】（1） $y=x^2-2x-3$，图见解析

（2） $-4\le y\le 5$

【分析】（1）根据表格得出抛物线过点 $(1,-4)$、$(-1,0)$、$(3,0)$，将点坐标代入抛物线解析式求出 a、b、c 即可，再利用描点法画函数图像；

（2）利用图像可直接得到答案．

【小问 1 详解】

解：∵设二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c(a\ne 0)$，

由题意得：当 $x=0$ 时， $y=-3$，

∴ $c=-3$,

∵ $x=1$ 时， $y=-4$，当 $x=-1$ 时， $y=0$，

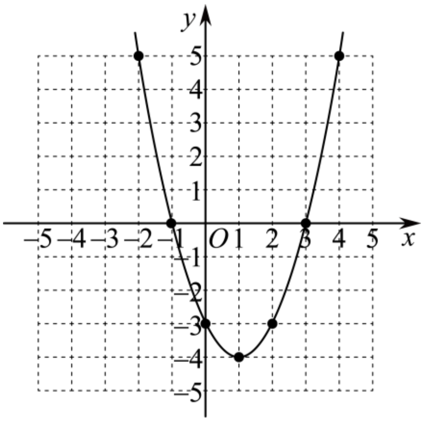
∴ $\begin{cases}a-b-3=0\\a+b-3=-4\end{cases}$,

解得 $\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}$,

∴ $y=x^2-2x-3$；

∵当 $x=4$ 时， $y=5$，

∴根据表格描点 $(-2,5),(-1,0),(0,-3),(1,-4),(2,-3),(3,0),(4,5)$，用平滑曲线连结，抛物线图像如图：



【小问 2 详解】

解：由图可得，抛物线的顶点为$\left(1,-4\right)$，

∴当 0≤x≤4 时，$-4\le y\le 5$．

【点睛】本题考查了待定系数法求抛物线解析式，描点法画函数图像，根据图像求函数值范围，熟练掌握待定系数法和描点法画函数图像是解题关键．

21.【答案】（1）$m<1$

（2）$x_1=0$，$x_2=2$

【分析】（1）根据方程有两个不相等的实数根可得到$4-4m>0$，计算即可；

（2）由（1）可知 m 取最大整数值是 0，代入方程利用因式分解法解方程即可．

【小问 1 详解】

∵关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m=0$ 有两个不相等的实数根，

∴$\Delta>0$，即$4-4m>0$，

∴$m<1$

【小问 2 详解】

由（1）知：$m<1$，且 m 取最大整数值，

∴$m=0$，

将$m=0$代入$x^2-2x+m=0$可得：

$x^2-2x=0$，

∴$x\left(x-2\right)=0$，

∴$x_1=0$，$x_2=2$，

故 m 取最大整数值 0 时，方程的根为：$x_1=0$，$x_2=2$

【点睛】此题考查了一元二次方程的根的情况求参数，解一元二次方程，正确理解并掌握一元二次方程的根的三种情况是解题的关键．

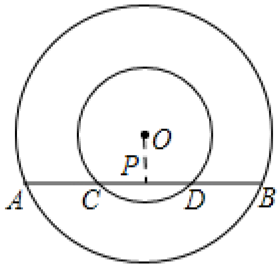
22.【答案】见解析

【分析】过点 O 作 $OP\perp AB$，由等腰三角形的性质可知 $AP=BP$，再由垂径定理可知 $CP=DP$，故可得出结论．

【详解】证明：如图所示，过点 O 作 $OP\perp AB$，垂足为点 P，

由垂径定理可得 $PA=PB$，$PC=PD$，$PA-PC=PB-PD$，

$\therefore AC=BD$.



【点睛】

本题考查的是垂径定理，根据题意作出辅助线，利用垂径定理求解是解答此题的关键.

23.【答案】$2\sqrt{2}$

【分析】根据旋转的性质可得 $\triangle ADE\cong\triangle ABF$，$\angle EAF=90^\circ$，从而得到 $AE=AF,\angle BAF=\angle DAE=30^\circ$，进而得到 $AF=2BF$，再由勾股定理可得 $BF=1$，从而得到 $AF=AE=2BF=2$，再由勾股定理，即可求解.

【详解】解：∵把 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 至 $\triangle ABF$ 的位置，

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle ABF$，$\angle EAF=90^\circ$，

$\therefore AE=AF,\angle BAF=\angle DAE=30^\circ$，

$\therefore AF=2BF$，

$\therefore AB=\sqrt{AF^2-BF^2}=\sqrt{(2BF)^2-BF^2}=\sqrt{3}BF$，

$\because AB=\sqrt{3}$，

$\therefore \sqrt{3}BF=\sqrt{3}$，即 $BF=1$，

$\therefore AF=AE=2BF=2$，

$\therefore EF=\sqrt{AF^2+AE^2}=2\sqrt{2}$.

【点睛】本题主要考查了勾股定理，图形的旋转，直角三角形的性质，正方形的性质，熟练掌握勾股定理，图形旋转的性质，直角三角形的性质是解题的关键.

24.【答案】当 AB 长为 $\frac{15}{2}$ 米时，所围成的花圃面积最大，最大面积是 $\frac{225}{2}$ 平方米

【分析】设 AB 长为 x 米，则 BC 长为 $(30-2x)$ 米，所围成的花圃面积为 y 平方米，依题意可得 $y=x(30-2x)=-2x^2+30x$，再根据题意得 $0<30-2x\le18$，利用二次函数的性质即可求出花圃面积最大时 AB 长和最大面积.

【详解】解：设 AB 长为 x 米，则 BC 长为 $(30-2x)$ 米，所围成的花圃面积为 y 平方米，依题意得：

$y=x(30-2x)=-2x^2+30x$，

$\because 0<30-2x\le 18$，

$\therefore 6\le x<15$，

$\because a=-2<0$，且对称轴为直线 $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{15}{2}$，

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{15}{2}$ 时，y 最大，最大为 $\dfrac{225}{2}$，

答：当 AB 长为 $\dfrac{15}{2}$ 米时，所围成的花圃面积最大，最大面积是 $\dfrac{225}{2}$ 平方米.

【点睛】本题考查了二次函数的应用，会根据题意列出 x、y 的关系式、求出 x 的取值范围是解题的关键.

25.【答案】（1）$x=\dfrac{3}{2}$；（2）点 B 的坐标为 $(3,1)$；（3）$-1\le a<0$ 或 $a\ge 2$

【分析】（1）根据对称轴公式即可求解；

（2）先求出点 A 的坐标，再求出其对称性即可求解；

（3）根据题意作图，根据函数图象的性质即可求解.

【详解】解：（1）由抛物线 $y=ax^2-3ax+1$，可知 $x=-\dfrac{-3a}{2a}=\dfrac{3}{2}$.

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=\dfrac{3}{2}$.

（2）$\because$ 抛物线 $y=ax^2-3ax+1$ 与 y 轴交于点 A，

令 x=0，y=1

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(0,1)$.

$\because$ 点 B 是点 A 关于直线 $x=\dfrac{3}{2}$ 的对称点，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3,1)$.

（3）$\because$ 点 A $(0,1)$，点 B $(3,1)$，点 $P(0,2)$，点 $Q(a+1,1)$，

$\therefore$ 点 P 在点 A 的上方，点 Q 在直线 $y=1$ 上.

①当 $a>0$ 时，$a+1>1$，点 Q 在点 A 的右侧.

（i）如图 1，当 $a+1<3$，即 $a<2$ 时，点 Q 在点 B 的左侧，

结合函数图象，可知线段 PQ 与抛物线没有公共点；

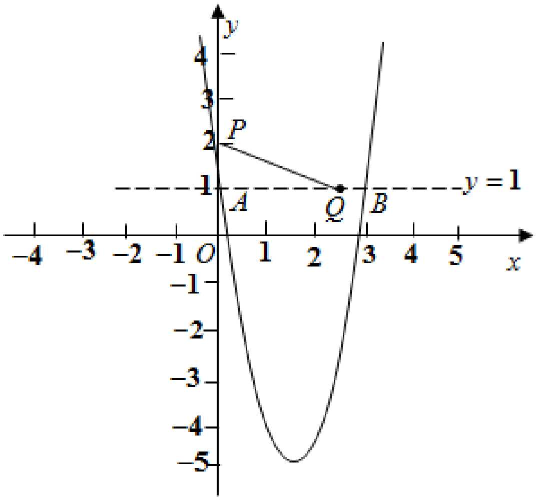


图1

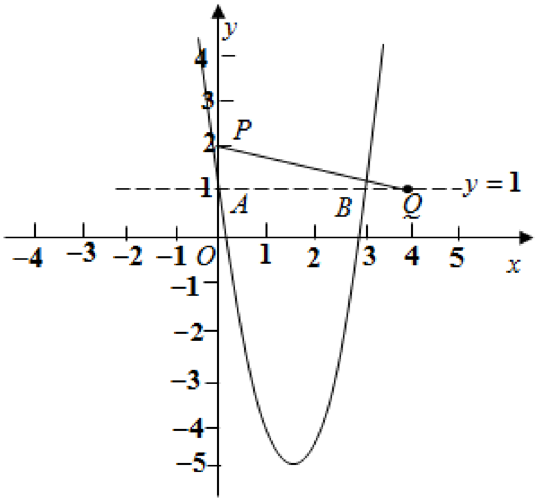


图2

（ii）如图 2，当$a+1\geqslant 3$，即$a\geq 2$时，点 Q 在点 B 的右侧，或与点 B 重合，

结合函数图象，可知线段 PQ 与抛物线恰有一个公共点

②当 $a<0$ 时，$a+1<1$，点 Q 在点 B 的左侧.

（i）如图 3，当$0\leqslant a+1<1$，即$-1\leq a<0$时，点 Q 在点 A 的右侧，或与点 A 重合，

结合函数图象，可知线段 PQ 与抛物线恰有一个公共点；

（ii）如图 4，当$a+1<0$，即$a<-1$时，点 Q 在点 A 的左侧，

结合函数图象，可知线段 PQ 与抛物线没有公共点.

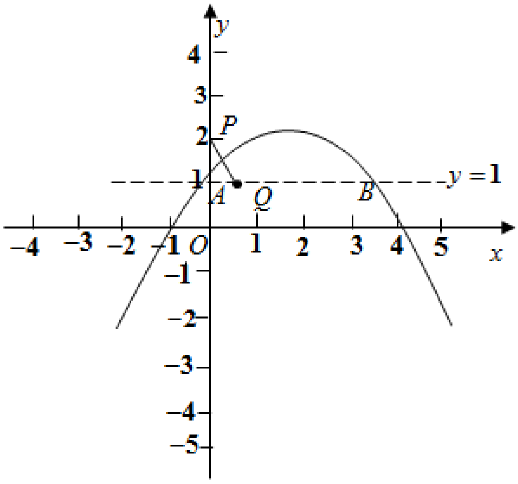


图3

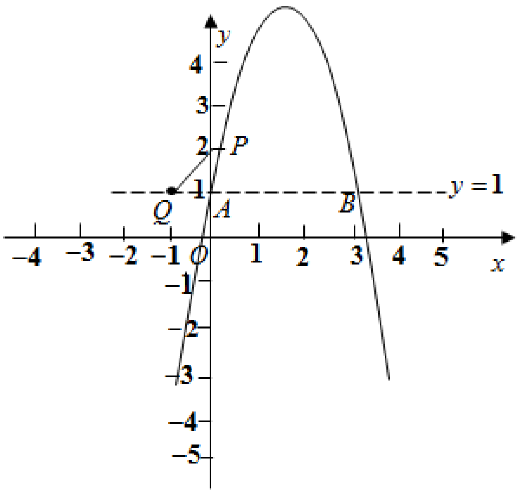


图4

综上所述，a 的取值范围是$-1\leq a<0$或$a\geq 2$.

【点睛】此题主要考查二次函数的图象综合，解题的关键是熟知二次函数的图象与性质、根据题意画图求解.

26.【答案】（1）见解析　（2）见解析

（3）$EN=FN$，理由见解析

【分析】（1）根据题意，过点 D 作 $DF\perp DE$，并且是沿线段 DE 绕点 D 顺时针旋转$90°$所作，使得 $DF=DE$ 即可

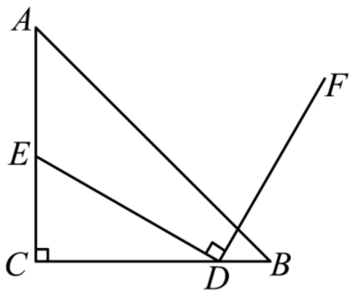
（2）在$\mathrm{Rt}\triangle CDE$中，$\angle CED=90^\circ-\angle CDE$，而$\angle FDB=180^\circ-90^\circ-\angle CDE=90^\circ-\angle CDE$，即可得$\angle CED=\angle FDB$

（3）过点F作$FH\perp BC$，交BC的延长线于点H，FH的延长线交射线CM于点G，可得$\mathrm{Rt}\triangle CDE\cong\mathrm{Rt}\triangle HFD$，且$\triangle CHG$是等腰直角三角形，即可得$CE=FG$，所以$\triangle CNE\cong GNF$，即可得到$EN=FN$

【小问1详解】

过点D作$DF\perp DE$，并且是沿线段DE绕点D顺时针旋转90°所作，使得$DF=DE$，

如下图所示：



【小问2详解】

$\because$ $\triangle ABC$是等腰$\mathrm{Rt}\triangle ABC$，

$\therefore \angle C=90^\circ$，

$\therefore \angle CED=90^\circ-\angle CDE$，

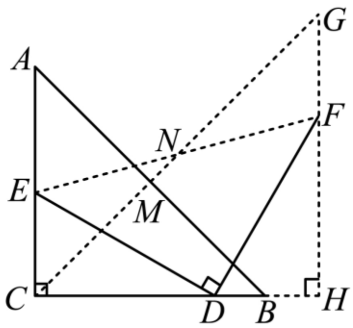
$\because \angle FDB=180^\circ-90^\circ-\angle CDE=90^\circ-\angle CDE$，

$\therefore \angle CED=\angle FDB$

【小问3详解】

$EN=FN$，理由如下：

过点F作$FH\perp BC$，交BC的延长线于点H，FH的延长线交射线CM于点G，



由（2）知$\angle CED=\angle FDB$，即$\angle CED=\angle FDH$，且$DF=DE$，$\angle ECD=\angle H=90^\circ$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle CDE\cong\mathrm{Rt}\triangle HFD$，

$\therefore CE=DH$，$CD=HF$

$\because$点M为AB中点，

$\therefore \angle HCG=\dfrac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$，且$FH\perp BC$，

$\therefore \angle G=45^\circ$，即$\triangle CHG$是等腰直角三角形，

$\therefore HC = HG$，且$CD = HF$，

$\therefore DH = FG$，且$CE = DH$，

$\therefore CE = FG$，且$\angle ECN = \frac{1}{2} \times 90° = 45° = \angle G$，$\angle CNE = \angle GNF$，

$\therefore \angle NEC = \angle NFG$，

$\therefore \triangle CNE \cong \triangle GNF$，

$\therefore EN = FN$

【点睛】本题考查了旋转作图、等腰三角形的性质和直角三角形的判定、全等三角形的判定和性质，能够按照题意作出辅助线是解决问题的关键

27.【答案】(1) AC

(2) $\pm\sqrt{2}$

(3) 当$OA_{\min} = 2$时，此时$BC = \frac{\sqrt{10}}{2}$；当$OA_{\max} = 3$时，此时$BC = \frac{\sqrt{15}}{3}$

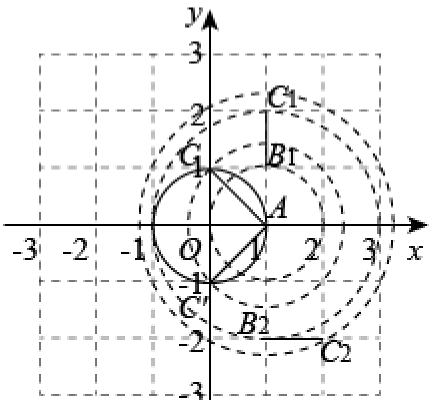
【分析】(1) 以点A为圆心，分别以AB_1、AC_1、AB_2、AC_2、AC为半径画圆，进而观察是否与$\odot O$有交点即可；

(2) 当点A在y轴的正半轴上时，由旋转的性质可得$\triangle AB'C'$是等腰直角三角形，且$B'C'$是$\odot O$的弦，根据$AB = 1 = OC' = OB' = AC' = AB'$可得四边形$AC'OB'$是正方形，即对角线$AO = \sqrt{2}AC' = \sqrt{2}$，问题随之得解；当点$A$在$y$轴的负半轴上时，同理可求；

(3) 由BC是$\odot O$的以点A为中心的“关联线段”，则可知B'，C'，都在$\odot O$上，且$AB' = AB = 2$，$AC' = AC = 3$，任取一点B'，当以B'为圆心，2为半径作圆，然后以点A为圆心，3为半径作圆，即可得到点A的运动轨迹；由运动轨迹可得当点A，O，C'，三点共线时，OA的值为最小，根据勾股定理以及等腰三角形的性质即可求解；当点A，B'，O，三点共线时，OA的值为最大，同理根据勾股定理以及等腰三角形的性质即可求解.

【小问1详解】

由题意得：



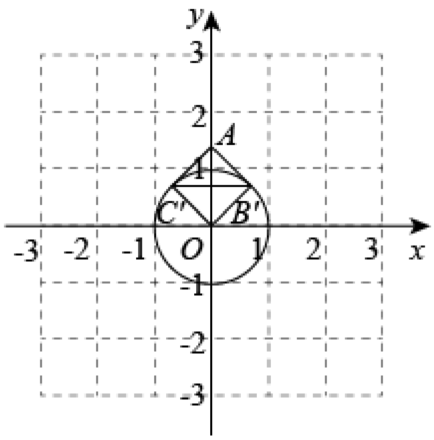
通过观察图形可得：线段AC能绕点A旋转90°得到$\odot O$的“关联线段”，B_1C_1、B_2C_2都不是$\odot O$的

弦；

故答案为：AC；

【小问 2 详解】

由题意可得：当 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的“关联线段”时，则有 $\triangle AB'C'$ 是等腰直角三角形，且边长也为 1，当点 A 在 y 轴的正半轴上时，如图所示：



$\because$ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle BAC = 90°$，$AB = 1$，

$\therefore$ $AB = AC = 1$，

$\therefore$根据旋转的性质有：$AB' = AC' = 1$，$\angle B'AC' = 90°$，

$\because$当 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的“关联线段”时，

$\therefore$ $B'C'$ 在 $\odot O$ 上，即 $OB' = OC' = 1$，

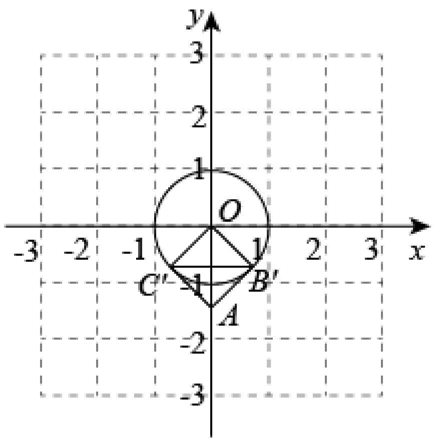
$\because$ $AB' = AC' = OB' = OC' = 1$，$\angle B'AC' = 90°$，

$\therefore$四边形 $AC'OB'$ 是正方形，

$\therefore$ $AO = \sqrt{2}AC' = \sqrt{2}$，

$\therefore$ $t = \sqrt{2}$；

当点 A 在 y 轴的负半轴上时，如图所示：



同理可得此时的 $OA = \sqrt{2}$，

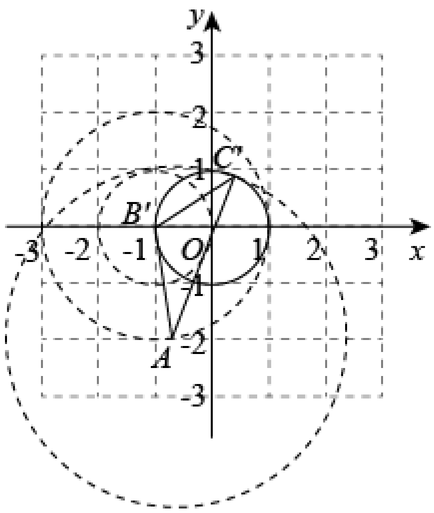
$\therefore$ $t = -\sqrt{2}$；

即 t 的值为：$\pm\sqrt{2}$；

【小问 3 详解】

由 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的“关联线段”，则可知 B'，C'，都在 $\odot O$ 上，且 $AB' = AB = 2$，$AC' = AC = 3$，

任取一点 B'，当以 B' 为圆心，2 为半径作圆，然后以点 A 为圆心，3 为半径作圆，即可得到点 A 的运动轨迹，如图所示：



由运动轨迹可得当点 A，O，C'，三点共线时，OA 的值为最小，

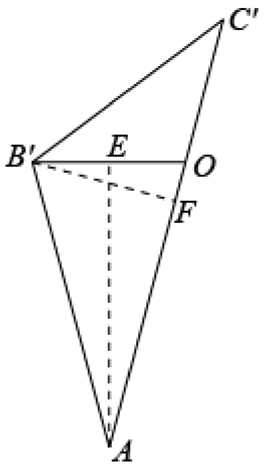
若此时点 A 再接近点 O，则根据 $AC' = 3$，可知点 C' 不在 $\odot O$ 上，

此时 AC' 过 $\odot O$ 的圆心，

根据作图，可知：$AB' = 2$，$AC' = 3$，$OB' = OC' = 1$，

$\therefore AO = AC' - OC' = 3 - 1 = 2$，即此时 OA 最小值为 2，

如图：过 A 点作 $AE \perp B'O$ 于 E 点，过 B' 点作 $B'F \perp AO$ 于 F 点，



$\because AB' = AO = 2$，$AE \perp B'O$，$OB' = OC' = 1$，

$\therefore B'E = EO = \dfrac{1}{2}$，

$\therefore AE=\sqrt{B'A^2-B'E^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，

$\because S=\dfrac{1}{2}\times B'O\times AE=\dfrac{1}{2}\times B'F\times AO$，

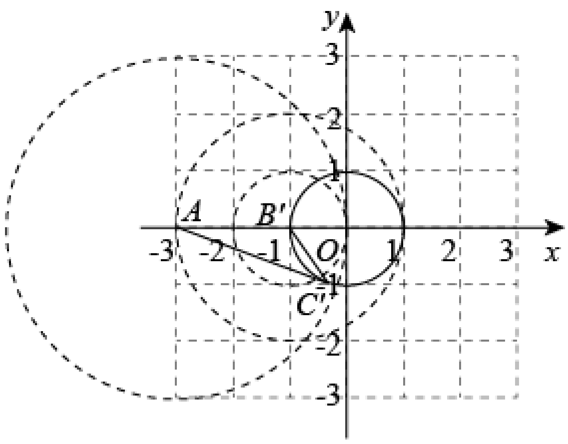
$\therefore B'F=\dfrac{B'O\times AE}{AO}=\dfrac{1\times\dfrac{\sqrt{15}}{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

$\therefore FO=\sqrt{B'O^2-B'F^2}=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}=\dfrac{1}{4}$，即 $FC'=OC'+FO=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$，

$\therefore B'C'=\sqrt{C'F^2+B'F^2}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{4}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，

$\therefore BC=B'C'=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，

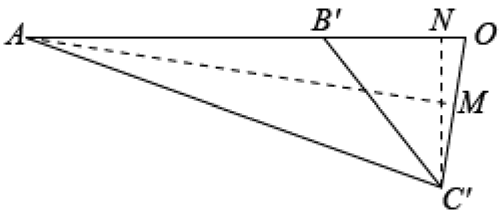
当点 A， B'， O，三点共线时， OA 的值为最大，如图所示：



根据作图，可知： $AB'=2$， $AC'=3$， $OB'=OC'=1$，

$\therefore AO=AB'+OB'=2+1=3$，即此时 OA 最大值为 3，

如图：过 A 点作 $AM\perp C'O$ 于 M 点，过 C' 点作 $C'N\perp AO$ 于 N 点，



$\because AC'=AO=2$， $AM\perp C'O$， $OB'=OC'=1$，

$\therefore C'M=MO=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore AM=\sqrt{C'A^2-C'M^2}=\dfrac{\sqrt{35}}{2}$，

$\because S_{\triangle AC'O}=\dfrac{1}{2}\times C'O\times AM=\dfrac{1}{2}\times C'N\times AO$，

$\therefore C'N=\dfrac{C'O\times AM}{AO}=\dfrac{1\times\dfrac{\sqrt{35}}{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{35}}{6}$，

$\therefore NO=\sqrt{C'O^2-C'N^2}=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{\sqrt{35}}{6}\right)^2}=\dfrac{1}{6}$，即 $B'N=B'O-NO=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$，

$\therefore B'C'=\sqrt{C'N^2+B'N^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{35}}{6}\right)^2+\left(\dfrac{5}{6}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$，

$\therefore BC=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$；

综上所述：当 $OA_{\min}=2$ 时，此时 $BC=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$；当 $OA_{\max}=3$ 时，此时 $BC=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$．

【点睛】本题主要考查旋转的综合、圆的基本性质、等腰三角形的性质、勾股定理等知识，熟练掌握旋转的性质、圆的基本性质，并根据题意准确作出图形是解题的关键．